MATEMÁTICA

1

Na cidade A, o valor a ser pago pelo consumo de água é calculado pela companhia de saneamento, conforme mostra o quadro a seguir.

Quantidade de água consumida (em m^3)	**Valor a ser pago pelo consumo de água (em reais)**
Até 10	$R\$\ 18,00$
Mais do que 10	$R\$\ 18,00 + (R\$\ 2,00$ por m^3 que excede $10\ m^3)$

Na cidade B, outra companhia de saneamento determina o valor a ser pago pelo consumo de água por meio da função cuja lei de formação é representada algebricamente por $B(x) = \begin{cases} 17 & \text{se } x \leq 10 \\ 2,1x - 4 & \text{se } x > 10 \end{cases}$, em que x representa a quantidade de água consumida (em m^3) e $B(x)$ representa o valor a ser pago (em reais).

a) **Represente algebricamente a lei de formação da função que descreve o valor a ser pago pelo consumo de água na cidade A.**

b) **Para qual quantidade de água consumida, o valor a ser pago será maior na cidade B do que na cidade A? Apresente os cálculos realizados na resolução deste item.**

QUESTÃO 1 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA

Conteúdo: Função polinomial de primeiro grau. Inequação de primeiro grau.

Resposta esperada

a) Sejam x a quantidade de água consumida (em m^3) e $A(x)$ o valor pago (em reais) pelo consumo de água na cidade A.

x	$A(x)$
1	18
2	18
$\vdots$	$\vdots$
10	18
11	$18 + 2(11 - 10)$
12	$18 + 2(12 - 10)$
$\vdots$	$\vdots$
x	$18 + 2(x - 10) = 2x - 2$

$$A(x) = \begin{cases} 18 & \text{se } x \leq 10 \\ 2x - 2 & \text{se } x > 10 \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} B(x) &> A(x) \\ 2,1x - 4 &> 2x - 2 \\ 2,1x - 2x &> -2 + 4 \\ 0,1x &> 2 \\ x &> 20 \end{aligned}$$

Resposta: O valor a ser pago será maior na cidade B do que na cidade A se a quantidade de água consumida for superior a $20\ m^3$.

Resolução alternativa

x	$A(x)$	$B(x)$
1	18	17
2	18	17
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	18	17
11	20	$19,1$
12	22	$21,2$
13	24	$23,3$
14	26	$25,4$
15	28	$27,5$
16	30	$29,6$
17	32	$31,7$
18	34	$33,8$
19	36	$35,9$
20	38	38
21	40	$40,1$
22	42	$42,2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Resposta: O valor a ser pago será maior na cidade B do que na cidade A se a quantidade de água consumida for superior a $20\ m^3$.

2

Em uma determinada competição esportiva, uma comissão será formada para acompanhar o exame *antidoping*. Essa comissão será constituída, obrigatoriamente, por 3 preparadores físicos e 2 médicos escolhidos, respectivamente, dentre 12 preparadores físicos e 10 médicos previamente selecionados do total de preparadores físicos e médicos das equipes participantes.

a) De quantas maneiras distintas essa comissão poderá ser formada?
Apresente os cálculos realizados na resolução deste item.

b) Considere que, dos 12 preparadores físicos, 4 sejam mulheres e, dos 10 médicos, 3 sejam mulheres. Qual é a probabilidade de uma comissão, para acompanhar o exame *antidoping*, conter uma única mulher, sendo esta uma preparadora física?
Apresente os cálculos realizados na resolução deste item.

QUESTÃO 2 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA

Conteúdo: Análise Combinatória. Probabilidade.

Resposta esperada

a) A quantidade de maneiras distintas possíveis para escolher 3 dos 12 preparadores físicos para compor a comissão é dada por $C_{12,3}$.
A quantidade de maneiras distintas possíveis para escolher 2 dos 10 médicos para compor a comissão é dada por $C_{10,2}$.
Como para cada uma das $C_{12,3}$ possibilidades de escolha dos preparadores físicos há $C_{10,2}$ possibilidades de escolha dos médicos, pelo Princípio Multiplicativo da Contagem, a comissão poderá ser formada de $C_{12,3} \cdot C_{10,2}$ maneiras diferentes.

$$C_{12,3} \cdot C_{10,2} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} \cdot \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} = 220 \cdot 45 = 9900$$

Ou seja, de 9900 maneiras diferentes.

b) Se dos 12 preparadores físicos 4 são mulheres, então 8 são homens.
Assim, se dentre os 3 preparadores físicos a serem escolhidos exatamente 1 tiver que ser mulher, há 4 possibilidades de escolha para esta integrante da comissão, e o número de possibilidades de escolha dos 2 homens é de $C_{8,2}$.
Assim, pelo Princípio Multiplicativo da Contagem, a escolha dos preparadores físicos poderá ser feita de

$$4 \cdot C_{8,2} = 4 \cdot \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 4 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} = 4 \cdot 28 = 112$$

maneiras distintas.

Se, dos 10 médicos, 3 são mulheres, então 7 são homens. Se estamos considerando as possibilidades em que há apenas 1 mulher na comissão e esta é preparadora física, então a escolha dos médicos deverá ser feita apenas entre os homens. Assim, a escolha dos médicos poderá ser feita de

$$C_{7,2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

maneiras distintas.

Nessas condições, para cada uma das 112 possibilidades de escolha dos preparadores físicos, há 21 possibilidades de escolha dos médicos, então, pelo Princípio Multiplicativo da Contagem, a comissão poderá ser formada de $112.21 = 2352$ maneiras diferentes. Assim, a probabilidade P de uma comissão para acompanhar os exames *antidoping* conter uma única mulher, sendo esta preparadora física, será de

$$P = \frac{2352}{9900} \approx 0,2375$$

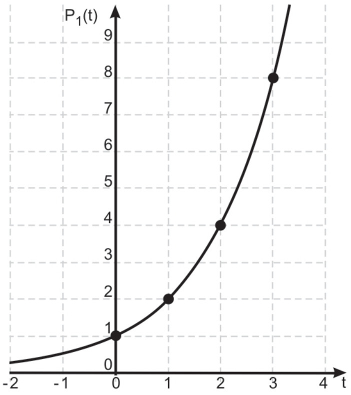
ou seja, de aproximadamente $23,75\%$.

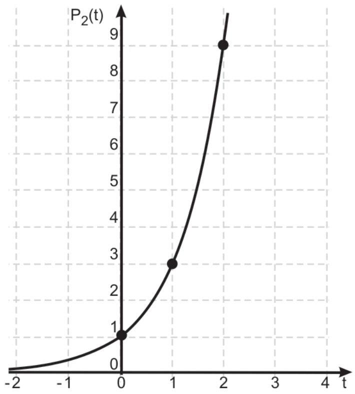
3

Sejam

$$\boldsymbol{P_1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \quad t \to \boldsymbol{P_1}(t) \qquad \textbf{e} \qquad \boldsymbol{P_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \quad t \to \boldsymbol{P_2}(t)$$

funções, cujas representações gráficas são mostradas nas figuras a seguir.





Considere que para $t \geq 0$ a cada uma dessas funções está associada a população de uma colônia de bactérias no instante t (medido em horas) e que a quantidade inicial de bactérias é a mesma para as duas colônias. Em que instante a população associada à função P_2 é igual ao dobro da população associada à função P_1? Apresente os cálculos realizados na resolução desta questão.

QUESTÃO 3 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA

Conteúdo: Função exponencial. Equação exponencial. Logaritmo.

Resposta esperada

Os pontos conhecidos, por meio da representação gráfica, para a função P_1 são $(t, P_1(t)) = \{(0,1), (1,2), (2,4), (3,8)\}$.
Nesse caso, $(t, P_1(t)) = (t, 2^t)$, ou seja, $P_1(t) = 2^t$.
Os pontos conhecidos, por meio da representação gráfica, para a função P_2 são $(t, P_2(t)) = \{(0,1), (1,3), (2,9)\}$.
Nesse caso, $(t, P_2(t)) = (t, 3^t)$, ou seja, $P_2(t) = 3^t$.
Assim, $P_2(t) = 2P_1(t) \Longrightarrow 3^t = 2.2^t$.
Isto é,

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^t = 2 \\ \log\left(\frac{3}{2}\right)^t = \log(2) \\ t\log\left(\frac{3}{2}\right) = \log(2) \end{array}\right] \quad \text{ou} \quad \left[\begin{array}{l} \log(3^t) = \log(2.2^t) \\ t\log(3) = \log(2) + t\log(2) \\ t\log(3) - t\log(2) = \log(2) \end{array}\right]$$

$$t(\log(3) - \log(2)) = \log(2)$$

$$t = \frac{\log(2)}{\log(3) - \log(2)}$$

Usando $\log(2) = 0,301$ e $\log(3) = 0,477$ temos

$$t = \frac{0,301}{0,176}$$

$$t \approx 1,71$$

Resposta: A população associada à função P_2 é igual ao dobro da população associada à função P_1 para $t \approx 1,71\ h$.

Resolução alternativa

t	$P_1(t)$
0	$1 = 2^0$
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
$\vdots$	$\vdots$
t	2^t

$P_1(t) = 2^t$

t	$P_2(t)$
0	$1 = 3^0$
1	$3 = 3^1$
2	$9 = 3^2$
$\vdots$	$\vdots$
t	3^t

$P_2(t) = 3^t$

Assim, $P_2(t) = 2P_1(t) \Longrightarrow 3^t = 2.2^t$.
Isto é,

$$\left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{3}{2}\right)^t = 2 \\ \log\left(\dfrac{3}{2}\right)^t = \log(2) \\ t\log\left(\dfrac{3}{2}\right) = \log(2) \end{array}\right] \text{ ou } \left[\begin{array}{l} \log(3^t) = \log(2.2^t) \\ t\log(3) = \log(2) + t\log(2) \\ t\log(3) - t\log(2) = \log(2) \end{array}\right]$$

$$t(\log(3) - \log(2)) = \log(2)$$

$$t = \frac{\log(2)}{\log(3) - \log(2)}$$

Usando $\log(2) = 0,301$ e $\log(3) = 0,477$ temos

$$t = \frac{0,301}{0,176}$$

$$t \approx 1,71$$

Resposta: A população associada à função P_2 é igual ao dobro da população associada à função P_1 para $t \approx 1,71\ h$.

4

Considere uma lata, com o formato de um cilindro reto de altura $h\ cm$ e raio $r\ cm$ (Figura 1), completamente cheia de doce de leite. Parte do doce dessa lata foi transferido para dois recipientes (Figura 2), iguais entre si e em forma de cone, que têm a mesma altura da lata e o raio da base igual à metade do raio da base da lata. Considere também que os dois recipientes ficaram completamente cheios de doce de leite.

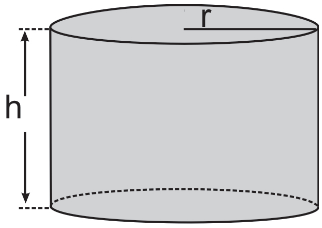


Figura 1

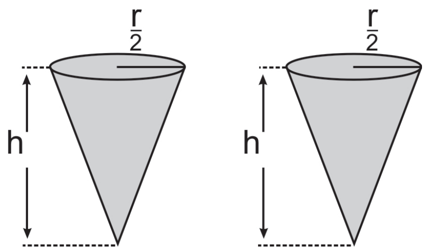


Figura 2

Desprezando a espessura do material de que são feitos os recipientes e a lata, determine quantos outros recipientes, também em forma de cone, mas com a altura igual à metade da altura da lata e de mesmo raio da lata (Figura 3), podem ser totalmente preenchidos com o doce de leite que restou na lata.
Apresente os cálculos realizados na resolução desta questão.

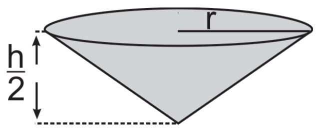


Figura 3

Observação:

Na lata e nos recipientes completamente cheios de doce de leite, o doce não excede a altura de cada um deles e, na transferência do doce de leite da lata para os recipientes, não há perda de doce.

QUESTÃO 4 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA

Conteúdo: Geometria Espacial.

Resposta esperada

Seja $V_{ci} = \pi r^2 h\ cm^3$ o volume da lata em forma de cilindro reto com altura $h\ cm$ e raio $r\ cm$.
Como a lata está completamente cheia, temos que o volume de doce de leite é de $V_{ci} = \pi r^2 h\ cm^3$.

O volume de cada recipiente em forma de cone com altura $h\ cm$ e raio $\dfrac{r}{2}\ cm$ é dado por $V_{co_1} = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{r}{2}\right)^2 h = \dfrac{\pi r^2 h}{12}\ cm^3$.

Então, o volume de dois recipientes em forma de cone com altura $h\ cm$ e raio $\dfrac{r}{2}\ cm$ é dado por $2 \cdot V_{co_1} = \dfrac{\pi r^2 h}{6}\ cm^3$.

O volume de doce de leite transferido para os dois cones é, portanto, $V_{trans} = \dfrac{\pi r^2 h}{6}\ cm^3$.

Assim, o volume restante de doce na lata será dado por $V_{res} = V_{ci} - V_{trans} = \pi r^2 h - \dfrac{\pi r^2 h}{6} = \dfrac{5\pi r^2 h}{6}\ cm^3$.

O volume de cada recipiente em forma de cone com altura $\dfrac{h}{2}\ cm$ e raio $r\ cm$ é dado por $V_{co_2} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \dfrac{h}{2} = \dfrac{\pi r^2 h}{6}\ cm^3$.

Portanto, a quantidade de recipientes em forma de cone com altura $\dfrac{h}{2}\ cm$ e raio $r\ cm$ que poderão ser totalmente preenchidos com o doce de leite restante na lata é dada por

$$\frac{V_{res}}{V_{co_2}} = \frac{\dfrac{5\pi r^2 h}{6}\ cm^3}{\dfrac{\pi r^2 h}{6}\ cm^3} = 5$$

Resposta: Com o doce de leite restante na lata poderão ser totalmente preenchidos 5 recipientes em forma de cone de altura $\frac{h}{2}\ cm$ e raio $r\ cm$.